

2. cvičení - Výroky, výrokové formule, matematická indukce

13. 10. 2022

* = příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

Příklad 1. Dokažte následující tvrzení:

a. $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pro $q \neq 1$.

b. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

c. Kořeny kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ nalezneme pomocí vzorce $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

d. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

e. * Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $5^n - 1$ dělitelné čtyřmi.

Příklad 2. Tabulkovou metodou dokažte, že následující výroky jsou tautologie.

a. $\neg(\neg A) \iff A$ (Zákon dvojí negace)

b. * $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$ (Princip obměny)

c. $A \vee (\neg A)$ (Princip vyloučení třetího)

d. $\neg(A \implies B) \iff (A \wedge \neg B)$ (negace implikace)

e. $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$ (alternativa implikace)

f. * $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies (A \implies C)$ (tranzitivita implikace)

Příklad 3. Ze stolu v kuchyni zmizelo pečené kuře. Podezření padá na tři domácí psy: Azora, Broka a Cicera. Nikdo jiný na místě činu nebyl. Zároveň víme, že:

a. Cicero nikdy nechodí do kuchyně bez Azora.

b. Brok neumí vylézt na stůl.

Podílel se Azor na zmizení kuřete?

Příklad 4. Totéž, ale tentokrát:

a. Azor vždycky chodí do kuchyně alespoň s jedním dalším psem.

b. Cicero byl v danou dobu u veterináře.

Podílel se Brok na zmizení kuřete?

Příklad 5. * Tátovi prý ze spíže zmizela paštika. Tvrdí, že:

a. Azor, Brok i Cicero byli v daný den doma a nikdo další tam nebyl.

b. Azor by se o paštiku rozdělil právě s jedním dalším psem.

c. Pokud Brok nesnědl paštiku, pak ji nesnědl ani Cicero.

d. Pokud psi jedli paštiku přesně ve dvou, pak jedním z nich byl určitě Azor.

e. Pokud Cicero nesnědl paštiku, pak ji nesnědl ani Brok.

Co z toho můžeme usoudit?

Příklad 6. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků a znegujte je.

- | | |
|---|---|
| a. $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N}: z > x \implies z > y$ | d. $* \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R}: x \cdot y = 1$ |
| b. $* \forall x, y \in \mathbb{R}: x \cdot y \geq 0 \implies x + y \geq 0$ | e. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{Q}: y \leq x \wedge x < y + 1$ |
| c. $* \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: x \cdot y = 1$ | f. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N}: y \leq x \wedge x < y + 1$ |

Příklad 7. Necht M značí množinu všech mužů a Z množinu všech žen. Uvažujme nyní následující výrokové formy:

- $S(m, z)$: Muž m je manželem ženy z .
- $L_1(m, z)$: Muž m miluje ženu z .
- $L_2(m, z)$: Žena z miluje muže m .

Zapište následující výroky pomocí kvantifikátorů, logických spojek a právě definovaných výrokových forem.

- | | |
|---|--|
| a. Každý ženatý muž miluje svou manželku. | Následující výroky přeložte do češtiny: |
| b. $* \text{Každou ženu miluje nějaký muž.}$ | f. $\exists m \in M \forall z \in Z : \neg S(m, z)$ |
| c. Každý muž má nejvýše jednu manželku. | g. $* \exists z \in Z \forall m \in M : L_1(m, z) \implies \neg L_2(m, z)$ |
| d. Existuje vdaná žena. | |
| e. $* \text{Existuje manželka, která miluje jiného muže, než svého manžela.}$ | h. $\exists z \in Z \forall m \in M : L_2(m, z) \implies \neg L_1(m, z)$ |

Příklad 8. Necht X, A, B jsou libovolné množiny. Dokažte následující výroky.

- | | |
|--|--|
| a. $\emptyset \subseteq A$ | d. $* (A \cap B = A) \iff A \subseteq B$ |
| b. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ | e. $X \cup (A \cup B) = (X \cup A) \cup B$ |
| c. $* A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ | f. $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ |